CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES, OPTION « EXPERTES »
mardi 7 novembre 2023

EXERCICE 1. 6,5 points

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

① Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.

② Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.

③ Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

④ Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

a) Donner la forme algébrique de $f(z)$ en fonction de x et y

b) Quels sont les nombres complexes z dont l'image $f(z)$ est un nombre réel?

EXERCICE 2. 4 points

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + \mathrm{i})z^2 + (17 - 8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = 0.$$

① Déterminer un imaginaire pur solution de (E).

② Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que $z^3 + (-8 + \mathrm{i})z^2 + (17 - 8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = (z + \mathrm{i})\left(az^2 + bz + c\right)$.

③ Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

EXERCICE 3. 4 points

① Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = z$.

② Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + \overline{z} = 9 + \mathrm{i}$

EXERCICE 4. 4 points

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = 4z^2 - 5z + 3$.

① Faire les calculs menant à la forme canonique de P

② Factoriser dans $\mathbb{C}$ cette forme canonique.

CORRIGÉ 1

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z)=z^2+2z+9$.

① $f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2+2\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+9=1-2\mathrm{i}\sqrt{3}-3-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}+9=5$

② On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=5$:

$f(z)=5 \iff z^2+2z+9=5 \iff z^2+2z+4=0$; $\Delta=4-16=-12=-\left(2\sqrt{3}\right)^2$

Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées: $\dfrac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

On appelle A le point d'affixe $z_A=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

$|z_A|=\sqrt{1+3}=2$

Soit θ_A un argument de z_A: $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_A=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow \theta_A=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc $z_A=2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B=2\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

$|z_A|=2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x=-1$. Idem pour B.

Voir graphique page 3.

③ Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.

$f(z)=\lambda \iff z^2+2z+9=\lambda \iff z^2+2z+9-\lambda=0$

Pour que l'équation $f(z)=\lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2+2z+9-\lambda$ soit strictement négatif.

$\Delta=4-4(9-\lambda)=4-36+4\lambda=4\lambda-32$; $\Delta<0 \iff 4\lambda-32<0 \iff \lambda<8$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $]-\infty\,;8[$.

④ Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z)-8|=3$

$f(z)-8=z^2+2z+9-8=z^2+2z+1=(z+1)^2$; donc $|f(z)-8|=\left|(z+1)^2\right|=|z+1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.

Donc $|f(z)-8|=3 \iff |z+1|^2=3 \iff |z+1|=\sqrt{3}$

Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1\,;0)$; si on appelle M le point d'affixe z, alors $|z+1|=\sqrt{3} \iff |z_M-z_\Omega|=\sqrt{3}$.

L'ensemble des points M vérifiant $|z_M-z_\Omega|=\sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.

On trace (F) sur le graphique (voir page 3).

⑤ Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

a) $f(z)=z^2+2z+9=(x+\mathrm{i}y)^2+2(x+\mathrm{i}y)+9=x^2+2\mathrm{i}xy-y^2+2x+2\mathrm{i}y+9$
$=x^2-y^2+2x+9+\mathrm{i}(2xy+2y)$

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
$f(z)$ réel $\iff 2xy+2y=0 \iff 2y(x+1)=0 \iff y=0$ ou $x=-1$
Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x=-1$.

Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\left(-1-\sqrt{3}\,;0\right)$ et $\left(-1+\sqrt{3}\,;0\right)$.

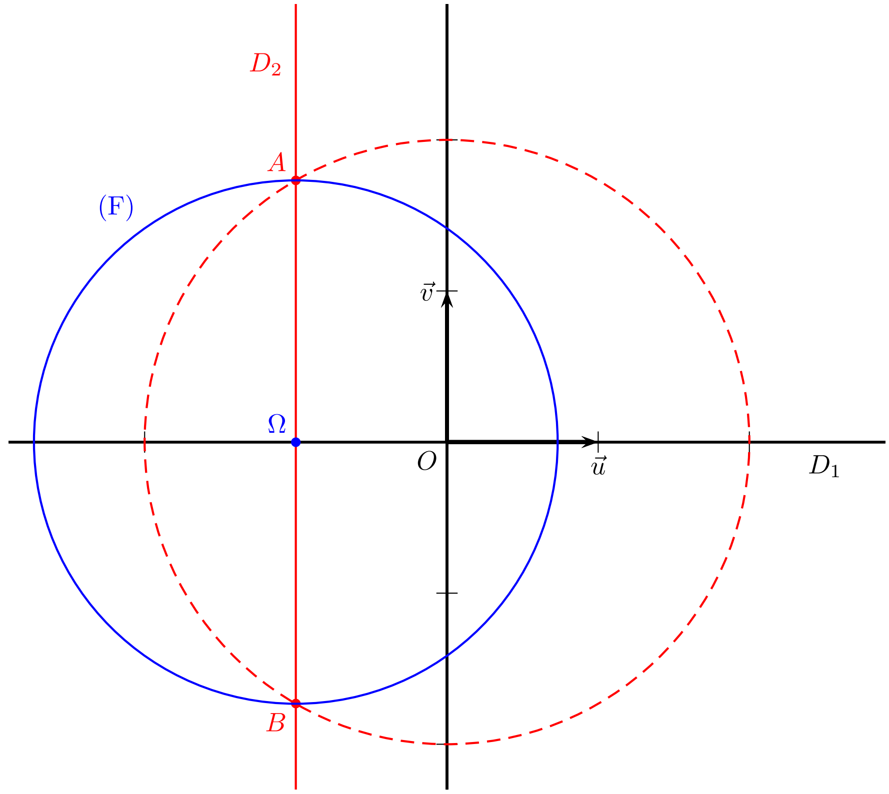
Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1; donc A et B sont situés sur la droite D_2.

$\Omega A=|z_A-z_\Omega|=\left|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}+1\right|=\left|\mathrm{i}\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$ donc le point A appartient au cercle (F).

$\Omega B=|z_B-z_\Omega|=\left|-1-\mathrm{i}\sqrt{3}+1\right|=\left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$ donc le point B appartient au cercle (F).

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont:

$\left(-1-\sqrt{3}\,;0\right)$, $\left(-1+\sqrt{3}\,;0\right)$, $\left(-1\,;\sqrt{3}\right)$ et $\left(-1\,;-\sqrt{3}\right)$



⑥ CORRIGÉ 2

① On a $(-\mathrm{i})^3 + (-8+\mathrm{i}) \times (-\mathrm{i})^2 + (17-8\mathrm{i}) \times (-\mathrm{i}) = \mathrm{i} + 8 - \mathrm{i} - 17\mathrm{i} - 8 + 17\mathrm{i} = 0 \iff -\mathrm{i}$ est solution de (E).

② En développant le second membre et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ a\mathrm{i}+b & = & -8+\mathrm{i} \\ b\mathrm{i}+c & = & 17-8\mathrm{i} \\ \mathrm{i}c & = & 17\mathrm{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -8 \\ c & = & 17 \end{array}\right.$$

On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = (z+\mathrm{i})\left(z^2 - 8z + 17\right)$.

③ On a donc (E) $\iff (z+\mathrm{i})\left(z^2-8z+17\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z+\mathrm{i} & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ z^2-8z+17 & = & 0 \end{array}\right.$.

Le déterminant du trinôme étant $\Delta = -4$, les solutions cherchées sont: $\mathrm{S} = \{-\mathrm{i}\ ;\ 4+\mathrm{i}\ ;\ 4-\mathrm{i}\}$

CORRIGÉ 3

CORRIGÉ 4 Soit $z \in \mathbb{C}$.
$2z^2 - 4z + 3 = 2(z^2 - 2z) + 3 = 2\left((z-1)^2 - 1\right) + 3 = 2(z-1)^2 + 1$
La forme canonique précédente permet de factoriser :
$2z^2 - 4z + 3 = 2\left((z-1)^2 + \frac{1}{2}\right) = 2\Big((z-1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^2\Big) = 2\left(z - 1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - 1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$